1082. 可換デナイ Operator Ring ノスペクトル分解ニ就イテ, I

小平　邦彦 (東京文理大)

Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ノ operator ring $\mathbb{M}$ ガ與ヘラレタトキ, ソノ center ヲ $\mathbb{Z}$ トスレバ, $\mathbb{Z}$ ハ一ツノ hermitic operator H デ生成サレル. 若シコノトキ H ガ點

スペクトルノミヲ有ツナラバ $\mathfrak{H}$ ハ H ノ固有空間 $\mathfrak{H}_n$ ノ直和ニ分解サレ，コレニ従ッテ M ハ"単純"ナ operator ring M_n ノ直和トナル。コノコトハ H ガ連続スペクトルヲモツトキハドウナルデアラウカ？ 以下コレヲ考ヘテ見タイ[1)]

§1. Relative Dimensionality[2)]

1.1. $\mathfrak{H}$ ヲ (separable ナ) Hilbert 空間，M ヲ 1 ヲ含ム $\mathfrak{H}$ ノ operator ring トシ，ソノ center ヲ Z トスル。$\mathsf{Z}=(\alpha 1)$ ノ場合ニハ M ハ factor ト呼バレ，J. von Neumann ト Murray ニヨッテ詳シク研究サレテキル。吾々ハソノ relative dimensionality ノ理論ヲ一般ノ場合ニ拡張スルコトカラ始メル。[2a)] —— 一般ニ $\mathfrak{H}$ ノ element ヲ $f, g,$ 等 $\mathfrak{H}$ ノ有限ナ operator ヲ A, B 等デ

1) コノ問題ニツイテハ Neumann ガ On infinite direct products, Comp. Math. 6 (1938) ノ序文デ注意シテキル。

2) コレニツイテハ前田文友氏ノ論文ガアル: Relative Dimensionality in Operator Rings, Jour. Sci. Hirosima Univ 11 (1) (1941).

2a) 先ヅ dimension ノコトカラ始メルノハ角谷氏ノ注意ニヨッタノデアル。$\mathsf{Z}=(\alpha 1)$ ノ場合ノ理論ハ殆ンドソノママ一般ノ場合ニ拡張サレル。以下述ベル理論ハ原理的ニハ J. Neumann ト Murray ノ理論ノ直接ナル一般化ニ過ギナイガ，技術的ニハ簡単ニナッテキル所ガアル。例ヘバ J. von

表ハス。$\mathfrak{H}$ ノ部分集合 $\mathfrak{A}$ ガ與ヘラレタトキ, $\mathfrak{A}$ ヲ含ム最小ノ linear closed manifold ヲ $[\mathfrak{A}]$ デ表ハシ, 特ニ $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{N}$ ガ互ニ orthogonal ナ closed linear manifold ナルトキ $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ ヲ $\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ ト書ク. 又一般ニ closed linear manifold ヲ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ 等, ソノ projection ヲ $P_{\mathfrak{M}}, P_{\mathfrak{N}}$ 等, projection operator ヲ E, F 等, partially isometric operator ヲ W, W ノ initial 及ビ final set ヲ夫々 $\mathfrak{E}_W, \mathfrak{F}_W$ デ現ハス. $\mathbb{M}$ ノ commutator ヲ $C(\mathbb{M})$ ト書ク.[3] ヨク知ラレテヰル如ク

$$C(C(\mathbb{M}))=\mathbb{M}$$

デアル。

定義1.1. $P_{\mathfrak{M}}\in\mathbb{M}$ ナルトキ $\mathfrak{M}$ ハ $\mathbb{M}$ ニ属スルトイヒ. $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbb{M}$ ト書ク.

明ラカニ $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbb{M}$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, スベテノ $A\in C(\mathbb{M})$ ニ対シテ $A\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ ナルコトデアル. 從ッテ $\mathfrak{M}_\nu$ $(\nu=1, 2, \text{-----})$ ガ $\mathbb{M}$ ニ属スルナラバ $\sum^{\smile}\mathfrak{M}_\nu$ ト $\prod^{\frown}\mathfrak{M}_\nu$ ト共ニ $\mathbb{M}$ ニ属スル。

定義1.2. $E, F\in\mathbb{M}$ ノトキ, $E=W^*W$, $F=WW^*$ ナル W ガ $\mathbb{M}$ 内ニ存在スルナラバ, $E\sim F\ (\mathbb{M})$, 或ハ

Neumann ト Murray ノ理論ニハ unbounded operator ガ現ハレルガ, 吾々ノ理論ハ bounded operator ダケヲ使ッテ組立テラレテヰル。

3) 通常ハ $\mathbb{M}$ ノ commutator ヲ $\mathbb{M}'$ ト書クガ紛レ易イカラ $C(\mathbb{M})$ トシタ。

$E \sim F$ ト書ク. 又 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ヲ $\mathbb{M}$ ガ與ヘラレタトキ
$P_{\mathfrak{M}} \sim P_{\mathfrak{N}}$ $(\mathbb{M})$ ナラバ $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ $(\mathbb{M})$, 或ハ $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ ト書ク。

$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ ハスナハチ $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_w$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_w$ ナル $\mathbb{M}$ ノ *partially isometric operator* w ガ存在スルコトニ他ナラナイ. 明ラカニ $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ ナラバ $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$ デアル. $\sim$ ハスナハチ一ツノ同値関係デアル。

又容易ニ示サレル如ク, $\mathfrak{M} = \sum \oplus \mathfrak{M}_\nu$, $\mathfrak{N} = \sum \oplus \mathfrak{N}_\nu$ ナルトキ $\mathfrak{M}_\nu \sim \mathfrak{N}_\nu$ ガスベテノ ν ニツイテ成立スレバ $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ デアル. コノ事カラ又, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{M}$ ナラバ $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ ナル事ガ示サレル.[4)] ソコデ吾々ハ $\precsim (\mathbb{M})$ ナル関係ヲ次ノ如ク定メル

定義 1.3. $E \sim G$ $(\mathbb{M})$, $G \leqq F$ ナルトキ $E \precsim F$ $(\mathbb{M})$ ト書ク. 又 $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ $(\mathbb{M})$, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{P}$ ナルトキ $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{P}$ $(\mathbb{M})$ ト書ク。

然ルトキハ, $\precsim$ ガ *partially order* ノ性質ヲモツ事, 明ラカデアラウ. —— 任意ノ有界ナ *operator* A ガ與ヘラレタトキ, ソノ *canonical decomposition* ヲ $A = wH$ トスレバ

$$\mathfrak{S}_w = [\mathit{Range}\ H] = \mathfrak{H} - (f;\ Hf = 0)$$
$$= \mathfrak{H} - (f;\ Af = 0) = [\mathit{Range}\ A^*],$$
$$\mathfrak{Z}_w = [\mathit{Range}\ A] = \mathfrak{H} - (f;\ A^* f = 0)$$

---

4) コノ証明ハ *Murray & Neumann* ノ $\mathfrak{Z} = 1$ ノ場合ノ証明ト全ク同ジデアル。

デアッテ，$A \in \mathbb{M}$ ナルタメニハ $H \in \mathbb{M}$，$W \in \mathbb{M}$ ナルコトガ必要且充分デアル．コノコトカラ直チニ次ノ Lemma ガ得ラレル．

Lemma 1.1. $A \in \mathbb{M}$ ナルトキハ

$$[\mathrm{Range}\ A] = \mathfrak{H} - (f;\ A^* f = 0) \sim \mathfrak{H} - (f,\ Af = 0)$$
$$= [\mathrm{Range}\ A^*]$$

コレヲ用ヒレバ容易ニ次ノ事実ガ証明サレル。

Lemma 1.2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\ \eta\ \mathbb{M}$ ナルトキハ

$$[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - \mathfrak{M} \frown \mathfrak{N} \quad (\mathbb{M})$$

証明．$[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - \mathfrak{N}$ ハ容易ニ知ラレル如ク $[\mathrm{Range}\ P_{\mathfrak{H} - \mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}}]$ デアル．故ニ Lemma 1.1. ニヨッテ

$$[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - \mathfrak{N} \sim \mathfrak{H} - (f;\ P_{\mathfrak{H} - \mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} f = 0)$$

然ルニ $(f;\ P_{\mathfrak{H} - \mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} f = 0)$ ハ $(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}) \oplus \mathfrak{M} \frown \mathfrak{N}$ ニ他ナラヌ．故ニ

$$[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - \mathfrak{M} \frown \mathfrak{N}.$$ (証明終)

定義 1.4. 与ヘラレタ $E \in \mathbb{M}$（或ハ $\in C(\mathbb{M})$）ニ対シテ，$F \geqq E$ ナル center $\mathbb{Z}$ ノ projection F ノ minimal ナルモノヲ E ノ central envelope ト名付ケ，E_Z デ現ハス．[5] 又 $\mathfrak{M}\ \eta\ \mathbb{M}$ ナルトキ $(P_{\mathfrak{M}})_Z$ ヲ $\mathfrak{M}_Z$ ト書ク

$\mathfrak{M}_Z$ ハ従ッテ $\mathbb{Z}$ ノ projection ヲ現ハスノデアル．

Lemma 1.3. $A \in \mathbb{M}$，$B \in C(\mathbb{M})$，$A \cdot B = 0$ ナラバ $B = EB$，$A = A(1 - E)$，$E \in \mathbb{Z}$ ナル projection E

---

5) 前田氏ノ論文ノ定義 2.1 ニヨル．

ガ存在スル。[6]

証明. $\mathfrak{M} = (f;\ A\mathbb{M}f = 0)$ トオケバ明ラカニ $P_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{Z}$ デアッテ $AP_{\mathfrak{M}} = 0$ デアル. 又 $g \in \mathfrak{H}$ ノトキ Bg ハスベテ $\mathfrak{M}$ ニ含マレル. スナハチ $B = P_{\mathfrak{M}}B$. 故ニ $E = P_{\mathfrak{M}}$ ガ求ムル *projection* デアル。

コノ重要ナ Lemma カラ次ノ Lemma ガ導カレル:

Lemma 1.4. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ハ $\mathbb{M}$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 内ニ夫々 $\mathbb{M}$ ニ屬スル *closed linear manifold* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1$ ヲ適當ニ選ンデ

$$\begin{cases} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1), \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_1), \\ \mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{N}_1\ (\mathbb{M}), \quad (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1)_Z \ (\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_1)_Z = 0 \end{cases}$$

ナラシメルコトガ出來ル。

証明. コレヲ示スニハ $\mathfrak{M}_Z \cdot \mathfrak{N}_Z \neq 0$ ナラバ $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}$ デ且ツ $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{N}_1\ (\mathbb{M})$ ナル $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1\ (\neq 0!)$ ガ存在スルコトヲ言ヘバヨイ。[7] コノタメニ $f \in \mathfrak{M}$, $f \neq 0$ ナル f ヲ任意ニトッテ *closed linear manifold* $[\overline{\mathbb{M}}f]$ ヲ考ヘル。[8] $[\mathbb{M}f]$ ハ $C(\mathbb{M})$ デアルカラ, 若シココデ $[\mathbb{M}f] \frown \mathfrak{N} = 0$ ナラバ Lemma 1.3 カラ $P_{[\mathbb{M}f]} = EP_{[\mathbb{M}f]}$, $P_{\mathfrak{N}}E = 0$ ナル $E \in \mathbb{Z}$ ガ存在スル. 従ッテ $1 - E \geqq \mathfrak{N}_Z$ トナルカラ $\mathfrak{N}_Z f = 0$ デアル.

---

6) 前田氏; Lemma 2.1.

7) 仝上 〃 2.5.

8) $[\mathbb{M}f] = [Af;\ A \in \mathbb{M}]$

故ニスベテノ $f \in \mathfrak{M}$ ニ対シテ $[\mathbb{M}f] \frown \mathfrak{N} = 0$ ナラバ
$\mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{N}_2 = 0$ トナッテシマフ。$[\mathbb{M}f] \frown \mathfrak{N} \neq 0$ ナル $f \in \mathfrak{M}$ ガアル場合ニハ $g \in [\mathbb{M}f] \frown \mathfrak{N}$, $g \neq 0$ ナル g ヲトレバ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ $\|Af - g\| < \varepsilon$ ナル $A \in \mathbb{M}$ ガアル。$g \in \mathfrak{N}$ デアルカラ，コノトキ $\|P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} f - g\| < \varepsilon$ トナル. 從ッテ ε ヲ充分小サクトッテオケバ $P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} \neq 0$ デアル。ソコデ $\mathfrak{M}_1 = [\mathrm{Range}\ P_{\mathfrak{M}} A^* P_{\mathfrak{N}}]$, $\mathfrak{N}_1 = [\mathrm{Range}\ P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}}]$ トオク。然ルトキハ明ラカニ $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{M}_1 \neq 0$, $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}_1 \neq 0$ デ，Lemma 1.1 カラ $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{N}_1$ $(\mathbb{M})$ デアル。

定義 1.5. $E \in \mathbb{Z}$ トスル。コノトキ $\mathbb{M}$ ニ属スル $\mathfrak{M}$ ハ $E\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \subsetneqq E\mathfrak{M}$ ナル $\mathfrak{P}$ ガ存在スルナラバ E ニ於テ無限デアルト言ヒ，コノヤウナ $\mathfrak{P}$ ガ存在シナイナラバ E ニ於テ有限デアルト言フ。特ニ $E = 1$ ナル場合ニハ單ニ $\mathfrak{M}$ ハ有限デアル，或ハ無限デアルト云フ。

明ラカニ $\mathfrak{M}$ ガ E デ有限ナラバ $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ ナル $\mathfrak{N}$ ハスベテ E デ有限デアル. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ガ共ニ E デ有限ナラバ $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ モ E デ有限デアル. コノコトハ証明ヲ要スル. 先ヅ

Lemma 1.5. $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}$ ナルトキハ

$$E\mathfrak{P} \precsim E\mathfrak{M}, \quad (1-E)\mathfrak{Q} \precsim (1-E)\mathfrak{N}$$

ナル projection $E \in \mathbb{Z}$ ガ存在スル。

証明. 一般ニ $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ ナルトキ

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \oplus \mathfrak{P} \frown \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{P} \frown \mathfrak{N}$$

トオケバ Lemma 1.1 ニヨッテ

$$[P_{\mathfrak{M}}\mathfrak{p}^*] = [\text{Range } P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{p}^*}]$$
$$\sim \mathfrak{h} - (f;\ P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{p}^*} f = 0) = \mathfrak{p}^*$$

デアル．サテ $\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{q} = \mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$ トシ

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*\oplus \mathfrak{p}\cap\mathfrak{M}\oplus \mathfrak{p}\cap\mathfrak{N},$$
$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*\oplus \mathfrak{q}\cap\mathfrak{M}\oplus \mathfrak{q}\cap\mathfrak{N}$$

トオク．$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{M}$ ニ Lemma 1.4 ヲ適用スレバ

$$\begin{cases} \mathfrak{p}\cap\mathfrak{N} = \mathfrak{L}_1\oplus\mathfrak{L}, & \mathfrak{L}_1\sim\mathfrak{r}_1, \\ \mathfrak{q}\cap\mathfrak{M} = \mathfrak{r}_1\oplus\mathfrak{r}, & \mathfrak{L}_2\cdot\mathfrak{r}_2 = 0 \end{cases}$$

ナル関係ガ成立スル．コヽデ $E = \mathfrak{r}_2$ トオケバ

$$E(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{N}) = E\mathfrak{L}_1,\quad E(\mathfrak{q}\cap\mathfrak{M}) = E\mathfrak{r}_1\oplus\mathfrak{r}$$

トナル．従ッテ，一般ニ $\mathfrak{L}\sim\mathfrak{M}$ ナラバ $E\in\mathbb{Z}$ ニ對シテハ $E\mathfrak{L}\sim E\mathfrak{M}$ デアルカラ，$\mathfrak{L}_1\sim\mathfrak{r}_1$ ナルコトカラ

$$E(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{N}) \precsim E(\mathfrak{q}\cap\mathfrak{M})$$

ナルコトガ分ル．然ルニ始メニ述べタ如ク $\mathfrak{p}^*\sim[P_{\mathfrak{M}}\mathfrak{p}^*]$ デアッテ，容易ニ確メラレル如ク $[P_{\mathfrak{M}}\mathfrak{p}^*]$, $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{M}$, $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{M}$ ハ互ニ orthogonal デアル．故ニ

$$E\mathfrak{p} = E\mathfrak{p}^*\oplus E(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{M})\oplus E(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{N})$$
$$\precsim E[P_{\mathfrak{M}}\mathfrak{p}^*]\oplus E(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{M})\oplus E(\mathfrak{q}\cap\mathfrak{M})$$
$$\precsim E\mathfrak{M}.$$

$1-E$ ニ於テハコレト反對ニ

$$(1-E)(\mathfrak{q}\cap\mathfrak{M}) \precsim (1-E)(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{N})$$

ガ成立ツ．故ニ $(1-E)\mathfrak{q}\precsim(1-E)\mathfrak{N}$ デアル。

Lemma 1.6. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\ \eta\ \mathbb{M}$ ガ共ニ $F\in\mathbb{Z}$ ニ於テ有限ナルトキハ和 $\mathfrak{r} = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ モ F ニ於テ有限デアル。

証明. $\mathfrak{h}_y$ ヲ $F\mathfrak{h}_y$ ニ限ッテ考ヘレバヨイカラ, 始メカラ $F=1$ トシテ一般性ヲ失ハナイ. —— $\mathfrak{r}=\mathfrak{n}\oplus(\mathfrak{r}-\mathfrak{n})$ デアルガ Lemma 1.2 ニヨレバ $\mathfrak{r}-\mathfrak{n}\sim\mathfrak{m}-\mathfrak{m}\frown\mathfrak{n}$ デアル. 従ッテ $\mathfrak{r}-\mathfrak{n}$ ハ有限デアル. 故ニ $\mathfrak{r}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$ トシテ証明スレバヨイ. 今 $\mathfrak{r}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$ ガ有限デナカッタト仮定スレバ

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1\oplus\mathfrak{p}_1,\quad \mathfrak{r}\sim\mathfrak{r}_1,\quad \mathfrak{p}_1\neq 0$$

ナル分解ガ可能デアル. $\mathfrak{r}_1$ ト $\mathfrak{r}$ ノ間ノ $\in \mathbf{M}$ ナル partially isometric ナル変換ニヨッテ $\mathfrak{r}$ ノコノ分解ヲ $\mathfrak{r}_1$ ニ写セバ, 結局

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_2\oplus\mathfrak{p}_1\oplus\mathfrak{p}_2,\quad \mathfrak{r}\sim\mathfrak{r}_1,\quad \mathfrak{p}_1\sim\mathfrak{p}_2\neq 0$$

トナル. 従ッテ $\mathfrak{r}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$ ナル分解ヲ更ニ $\mathfrak{r}_2$ ニ写セバ

$$\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}=\mathfrak{m}_2\oplus\mathfrak{n}_2\oplus\mathfrak{p}_1\oplus\mathfrak{p}_2,\quad \mathfrak{m}\sim\mathfrak{m}_2,$$
$$\mathfrak{n}\sim\mathfrak{n}_2$$

ナル関係ガ成立ツ. 故ニ Lemma 1.5 ニヨッテ

$$E(\mathfrak{m}_2\oplus\mathfrak{p}_1)\precsim E\mathfrak{m},$$
$$(1-E)(\mathfrak{n}_2\oplus\mathfrak{p}_2)\precsim(1-E)\mathfrak{n}$$

ナル $E\in\mathbf{Z}$ ガ存在スル. $E\mathfrak{m}\sim E\mathfrak{m}_2$, $(1-E)\mathfrak{n}\sim(1-E)\mathfrak{n}_2$ デアルカラ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ ガ有限デアルトイフ仮定ニヨッテ

$$E\mathfrak{p}_1=(1-E)\mathfrak{p}_2=0$$

デナケレバナラヌ 然ルニ $\mathfrak{p}_1\sim\mathfrak{p}_2$ デアルカラ

$$\mathfrak{p}_1=E\mathfrak{p}_1\oplus(1-E)\mathfrak{p}_1\sim E\mathfrak{p}_1\oplus(1-E)\mathfrak{p}_2$$
$$=0$$

コレハ $\mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{p}_2 \neq 0$ ニ反スル。

1.2. コノ節デ $\mathbb{M}$ ニ関スル dimension ヲ導入スル。$\mathbb{Z}$ ニ含マレル projection 全体ノ作ル Boolean algebra $(E)_{\mathbb{Z}}$ ハ、Lebesgue measure m ノ定義サレタ空間 Ω ヲ適当ニ選ベバ、Ω ノ可測集合ノ作ル Boolean algebra (Γ) ヲ null set ノ作ル sub-algebra $(\Gamma)_0$ デ割ッタモノ：$(\Gamma)/(\Gamma)_0$ ニ isomorphic トナル。

而モ Ω ハ $m(\Omega)<+\infty$ ナルヤウニ選ブコトガ出来ル。吾々ハ $E\in\mathbb{Z}$ ヲコノ isomorphism デ対應スル可測集合 Γ ヲ用ヒテ $E=E(\Gamma)$ ト現スコトニスル。

定義2.1. $E\in\mathbb{Z}$ トスル。コノトキ $\mathfrak{N}^0 \eta \mathbb{M}$ ガ二ツノ條件：

$$\begin{cases} \text{i)} & \mathfrak{N}^0_Z = E \\ \text{ii)} & \mathfrak{M}_Z = E \text{ 且ツ } \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^0,\ \mathfrak{M}\,\eta\,\mathbb{M} \text{ ナラバ } \mathfrak{M}=\mathfrak{N}^0 \end{cases}$$

ヲ満足スルナラバ、$\mathfrak{N}^0$ ハ E ニ於テ $\mathbb{M}$ ニ関シ最小デアルトイフ。コノトキ又 $P_{\mathfrak{N}^0}$ ハ E ニ於テ $\mathbb{M}$ ニ関シ最小デアルトイフ。

E デ最小ナ $\mathfrak{N}^0$ ハ有限デアル。何トナレバ、一般ニ $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{N}$ ナラバ $\mathfrak{M}_Z=\mathfrak{N}_Z$ デアルカラ[9]、$\mathfrak{N}^0\sim\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{N}^0$ トスレバ

9) $P_{\mathfrak{M}} = W^*W$, $P_{\mathfrak{N}} = WW^*$ トスレバ $W\mathfrak{M}_Z = W$. 故ニ $\mathfrak{M}_Z \in \mathbb{Z}$ ダカラ $P_{\mathfrak{N}} \leqq \mathfrak{M}_Z$. 故ニ $\mathfrak{N}_Z \leqq \mathfrak{M}_Z$.
故ニ $\mathfrak{N}_Z = \mathfrak{M}_Z$

$\mathfrak{P}_Z = \mathfrak{N}^0_Z = E$, 従ッテ $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}^0$ デナケレバナラヌ。

Lemma 2.1. $E, F \in \mathbb{Z}$, $F \leqq E$ トスル. 然ルトキハ $\mathfrak{M}_Z = E$ ナラバ $(F\mathfrak{M})_Z = F$ デアル. 又 $\mathfrak{M}^0$ ガ E デ最小ナラバ $F\mathfrak{M}^0$ ハ F デ最小デアル。

証明 i) 明カニ $(F\mathfrak{M})_Z \leqq F$ デアルガ, 一方

$$(F\mathfrak{M})_Z + (E - F) \geqq P_{\mathfrak{M}}$$

モ明カデアル。故ニ $(F\mathfrak{M})_Z = F$ デナケレバナラヌ。

ii) $\mathfrak{M}_Z = F$, $\mathfrak{M} \subseteq F\mathfrak{N}^0$ デアッタトスル. スルト

$$(\mathfrak{M} \oplus (E - F)\mathfrak{N}^0)_Z = E,$$

$$\mathfrak{M} \oplus (E - F)\mathfrak{N}^0 \subseteq \mathfrak{N}^0$$

故ニ $\mathfrak{M} \oplus (E - F)\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{N}^0$ デナケレバナラヌ。両辺ニ F ヲ掛ケレバ $\mathfrak{M} = F\mathfrak{N}^0$ ヲ得ル。

Lemma 2.2. $E_j \in \mathbb{Z}$, $E_j \cdot E_k = 0$ $(j \neq k)$, $(\mathfrak{N}_j)_Z = E_j$ デアッタトシ $E = \sum E_j$, $\mathfrak{N} = \sum \oplus \mathfrak{N}_j$ トオク. 然ルトキハ $\mathfrak{N}_Z = E$ デアッテ, $\mathfrak{N}_j$ ガ有限ナラバ $\mathfrak{N}$ モ有限, $\mathfrak{N}_j$ ガ各 E_j デ最小ナラバ $\mathfrak{N}$ モ E デ最小デアル。

証明. $\mathfrak{N}_Z = E$ ハ明ラカデアル.

i) $\mathfrak{N}_j$ ガ有限デアッタトシ, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{N}$ トスル. スルト $\mathfrak{N}_j = E_j\mathfrak{N} \sim E_j\mathfrak{P} \subseteq E_j\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_j$ 故ニ $E_j\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_j$. 故ニ $\mathfrak{P} = \sum E_j\mathfrak{P} = \sum \mathfrak{N}_j = \mathfrak{N}$. 故ニ $\mathfrak{N}$ ハ有限デアル。

ii) $\mathfrak{N}_j$ ガ E_j デ最小デアルトスル. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_Z = E$ トスレバ $E_j\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_j$, $(E_j\mathfrak{M})_Z = E_j$. 故ニ $E_j\mathfrak{M}$

$=\mathfrak{N}_{j_0}$.

故ニ $\mathfrak{M}=\sum\oplus E_j\mathfrak{M}=\sum\oplus\mathfrak{N}_j=\mathfrak{N}$. スナハチ $\mathfrak{N}$ ハ E デ最小デアル。（証明了）

$E_j\in Z$ ガ任意ニ與ヘラレタトシ，$(\mathfrak{N}_j)_Z=E_j$ ナル $\mathfrak{N}_j$ デ有限ナルモノガアッタトスル。スルト $\mathfrak{N}_j$ ノ M ナル submanifold ハスベテ有限デアルカラ

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\oplus\sum_{j=1}^{\infty}(E_{j+1}-E_1\vee E_2\vee\cdots\cdots\vee E_j)\mathfrak{N}_{j+1}$$

トオケバ，Lemma 2.1 ト 2.2 ニヨッテ $\mathfrak{N}$ ハ有限デ $\mathfrak{N}_Z=\sum\vee E_j$ ヲ満足スルコトガ分ル。特ニ又 $\mathfrak{N}_j$ ガ E_j デ最小ナラバ $\mathfrak{N}$ ハ $\sum\vee E_j$ デ最小トナル。コノコトカラ先ヅ $\mathfrak{N}_Z=E$ ナル有限ナ $\mathfrak{N}$ ガ存在スル如キ projection E ノ最大ナルモノガ存在スルコトガ分ル。[10] コレヲ E_0 トシ

$$E_{III}=1-E_0$$

トオク。然ルトキハ如何ナル $E\leqq E_{III}$ ヲトッテモ，$\mathfrak{M}$ ノ M ハ $E\mathfrak{M}\neq 0$ ナル限リ E ニ於テ無限デアル。

次ニ同様ニシテ，$\mathfrak{N}^0_Z=E$ ナル最小ナ $\mathfrak{N}^0$ ガ存在スル如キ projection $E\,(\in Z)$ ノ最大ナルモノガ存在ス

---

10) コノ様ナ E ヲ $E(\Gamma)$ ト書キ，$m=\sup m(\Gamma)$ トオイテ $E_j=E(\Gamma_j)$ ヲ，$\Gamma_j\subseteq\Gamma_{j+1}$ 且ツ $\lim m(\Gamma_j)=m$ ナル様ニトレバ $E=\sum\vee E_j$ ハ求ムル最大ナモノトナル。或ハ直接超限帰納法ヲ使ッテモ証明出来ル。

ルコトが分ル．コレヲ E_{I} トオク．明ラカニ $E_{I} \leqq E_{0}$ デアル．最後ニ E_{II} ヲ

$$E_{II} = E_{0} - E_{I}$$

ト定義スル．然ルトキハ E_{II} ニ於テハ $\mathfrak{N}_{Z} = E_{II}$ ナル有限ナ $\mathfrak{N}$ が存在スルが，如何ナル $E \leqq E_{II}$ ヲトッテモ E デ最小ナ $\mathfrak{N}$ ハ存在シナイノデアル．コノヤウナ事情ヲ言ヒ表スタメニ次ノ定義ヲオク。

定義2.2. $E \in \mathbb{Z}$ トスル．コノトキ

i) E ニ於テ最小ナ $\mathfrak{N}^{p}\,\eta\,\mathbb{M}$ が存在スルナラバ $\mathbb{M}$ ハ E ニ於テ I型デアルトイフ。

ii) $\mathfrak{N}_{Z} = E$ ナル有限ナ $\mathfrak{N}\,\eta\,\mathbb{M}$ が存在スルが，如何ナル $F(\in \mathbb{Z}) \leqq E$ ヲトッテモ $\mathbb{M}$ が F デ I型デナイトキ $\mathbb{M}$ ハ E ニ於テ II型ニ屬スルトイフ．

iii) $E\mathfrak{N} \neq 0$ ナル限リ如何ナル $\mathfrak{N}\,\eta\,\mathbb{M}$ モ E ニ於テ無限ナルトキ，$\mathbb{M}$ ハ E ニ於テ III型デアルトイフ。

コノ定義ヲ用ヒレバ上ニ得ラレタ結果ハ次ノ形ニ現ハサレル。

定理1. $\mathbb{M}$ ニ對シテ

$$1 = E_{I} + E_{II} + E_{III},$$

$$E_{I}E_{II} = E_{II}E_{III} = E_{III}E_{I}$$

ナル $\mathbb{Z}$ ノ *projection* E_{I}, E_{II}, E_{III} が定リ，$\mathbb{M}$ ハ E_{I}, E_{II}, E_{III} ニ於テ夫々 I型，II型，III型ニ屬スル

—— コノ E_{I}, E_{II}, E_{III} ニヨッテ $\mathfrak{H}$ ハ

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{I} \oplus \mathfrak{H}_{II} \oplus \mathfrak{H}_{III}, \quad \mathfrak{H}_{N} = E_{N}\mathfrak{H} \ (N = I, II, III)$$

ノ形ニ分解セラレル．$\mathbf{M}$, $C(\mathbf{M})$ ハ共ニ $\mathfrak{H}_N$ ニヨッテ reduce サレル．從ッテ $\mathbf{M}$, $C(\mathbf{M})$ ヲ考ヘル ニハ 各 $\mathfrak{H}_N$ ヲ別々ニ論ズレバヨイ，

定義2.3. $E \in \mathbf{Z}$，$\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \,\eta\, \mathbf{M}$ トスル．コノトキ $E\mathfrak{M} \fallingdotseq E\mathfrak{N}$ デアッテ，$0 < F \leqq E$, $F \in \mathbf{Z}$ ナルスベテノ F ニツイテ $F\mathfrak{M} \not\fallingdotseq F\mathfrak{N}$ ナラバ

$$\mathfrak{M} \underset{E}{\fallingdotseq} \mathfrak{N}$$

ト書ク．

明カニ $\mathfrak{M} \underset{E}{\fallingdotseq} \mathfrak{N}$ ナラバ $E\mathfrak{N}_z = E$ デアル．—— $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \,\eta\, \mathbf{M}$ ガ任意ニ與ヘラレタトスルト，$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ハ Lemma 1.4 ニヨッテ

$$\begin{cases} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{p}, & \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{q}, \\ \mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{N}_1 \ (\mathbf{M}), & \mathfrak{p}_Z \cdot \mathfrak{q}_Z = 0 \end{cases}$$

ノ形ニ分解サレル．$\mathfrak{q}_Z = E$, $1 - E = F$ トオケバ，E ニ於テハ

$$E\mathfrak{M} = E\mathfrak{M}_1, \quad E\mathfrak{N} = E\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{q},$$
$$E\mathfrak{M}_1 \sim E\mathfrak{N}_1,$$

F ニ於テハ

$$F\mathfrak{M} = F\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{p}, \quad F\mathfrak{N} = F\mathfrak{N}_1,$$
$$F\mathfrak{M}_1 \sim F\mathfrak{N}_1$$

デアル．從ッテ

$$E\mathfrak{M} \fallingdotseq E\mathfrak{N}, \quad F\mathfrak{N} \fallingdotseq F\mathfrak{M}$$

ガ成立スル．特ニ $\mathfrak{N}$ ガ有限ノ場合ニハ

$$E\mathfrak{M} \underset{E}{\fallingdotseq} E\mathfrak{N}$$

デアル. 何トナレバ $0 < E_1 \leqq E$, $E_1\mathfrak{M} \sim E_1\mathfrak{N}$ ナル E_1 ガアッタトスレバ

$$E_1\mathfrak{M}_1 \sim E_1\mathfrak{N}_1 \oplus E_1\mathfrak{q}$$

トナルガ, 一方 $E_1\mathfrak{M}_1 \sim E_1\mathfrak{N}_1$ デ $E_1\mathfrak{N}_1$ ハ有限デアル. 故ニ $E_1\mathfrak{q} = 0$ デナケレバナラナイガ, コレハ $\mathfrak{q}_Z = E$ ニ反スル.

結果ヲマトメテ言ヘバ:

Lemma 2.3. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \eta\, \mathbb{M}$ トスルト

$$E\mathfrak{M} \fallingdotseq E\mathfrak{N}, \quad (1-E)\mathfrak{N} \fallingdotseq (1-E)\mathfrak{M}$$

ナル $\mathbb{Z}$ ノ projection E ガ存在スル 特ニ $\mathfrak{N}$ ガ有限ノ場合ニハ, コノ E ヲ $\mathfrak{M} \lesseqgtr \mathfrak{N}$ ナルヤウニ選ブコトガ出来ル。

Lemma 2.4. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \eta\, \mathbb{M}$ 且ツ $\mathfrak{N}$ ハ有限トスル. 然ルトキハ $\mathfrak{N}_Z$ ハ $\mathbb{Z}$ ニ於テ

$$\mathfrak{N}_Z = E_\infty + \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \quad E_n E_m = 0$$

$$(0 \leqq n < m \leqq \infty)$$

ノ形ニ分解サレル。$E_n\ (n < +\infty)$ ニ於テハ $\mathfrak{M}$ ハ

$$\begin{cases} E_n\mathfrak{M} = \underbrace{\mathfrak{p}_n^1 \oplus \mathfrak{p}_n^2 \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{p}_n^n}_{n\text{個}} \oplus \mathfrak{q}_n, \\ \mathfrak{p}_n^j \sim E_n\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{q}_n \underset{E_n}{\lll} E_n\mathfrak{N} \end{cases}$$

ト現ハサレ, E_∞ ニ於テハ

$$E_\infty\mathfrak{M} = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus\, \mathfrak{p}_\infty^j, \qquad \mathfrak{p}_\infty^j \sim E_\infty\mathfrak{N}$$

ガ成立スル. $\mathfrak{N}_Z$ ノコノ様ナ分解ハ唯一通リニ限ル。

証明. $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_0$ トオキ, コレニツイテ

Lemma 2.3. ヲ適用シテ E, F, G ヲ定メ,

$$E_0=\mathfrak{N}_Z E, \qquad F_0=\mathfrak{N}_Z(1-E)$$

ニヨッテ E_0, F_0 ヲ定メル. 然ルトキハ明ラカニ

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_Z = E_0+F_0 \\ E_0\mathfrak{M}_0 \underset{E_0}{\ll} E_0\mathfrak{N}_0 \\ F_0\mathfrak{M}_0 \gtrsim F_0\mathfrak{N}_0 \end{cases}$$

デアル. ソコデ $\mathfrak{Q}_0$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ ヲ

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}_0 = E_0\mathfrak{M}_0; \\ F_0\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{P}'\oplus\mathfrak{M}_1, \qquad \mathfrak{P}'\sim F_0\mathfrak{N}_0; \\ \mathfrak{N}_1 = F_0\mathfrak{N}_0 \end{cases}$$

ニヨッテ定メル. 然ルトキハ明ラカニ

$$(\mathfrak{N}_1)_Z = F_0$$

デアル. —— コレカラ始メテ E_n, F_n, $\mathfrak{Q}_n$, $\mathfrak{P}^{n+1}$, $\mathfrak{M}_{n+1}$, $\mathfrak{N}_{n+1}$, ヲ帰納法ニヨッテ順次ニ定義シテ行ク. スナハチ $\mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{N}_n$ ニ *Lemma* 2.3 ヲ適用シテ E ヲ定メ, コノ E ヲ用ヒテ

$$\begin{cases} E_n = (\mathfrak{N}_n)_Z E \\ F_n = (\mathfrak{N}_n)_Z - E_n \end{cases}$$

ニヨッテ E_n, F_n ヲ定義シ,

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}_n = E_n\mathfrak{M}_n \\ \mathfrak{N}_{n+1} = F_n\mathfrak{N}_n \end{cases}$$

トオク. ソシテ

$$F_n\mathfrak{M}_n = \mathfrak{p}^{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+1}, \quad \mathfrak{p}^{n+1} \sim F_n \mathfrak{N}_n$$

ニヨッテ $\mathfrak{p}^{n+1}$, $\mathfrak{M}_{n+1}$ ヲ定義スル．カクノ如ク進ンデ行ッテ最後ニ

$$\begin{cases} E_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} F_n, \\ \mathfrak{M}_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} \frown \mathfrak{M}_n \end{cases}$$

トオク．然ルトキハ容易ニ確メラレル如ク

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_z = E_\infty + \sum_{n=0}^{\infty} E_n, \\ \mathfrak{N}_z \ \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ \mathfrak{p}^n \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \ \mathfrak{q}_n \end{cases}$$

デアッテ，

$$\begin{cases} \mathfrak{p}^{n+1} \sim F_n \mathfrak{N}_n, \\ \mathfrak{q}_n \precneqq_{E_n} E_n \mathfrak{N} \end{cases}$$

ナル関係ガ成立スル．故ニ $n < +\infty$ ニ對シテハ

$$\mathfrak{p}_n^j = E_n \mathfrak{p}^j \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

トオケバ

$$\begin{cases} E_n \mathfrak{M} = \mathfrak{p}_n^1 \oplus \mathfrak{p}_n^2 \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{p}_n^n \oplus \mathfrak{q}_n, \\ \mathfrak{p}_n^j \sim E_n \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{q}_n \precneqq_n E_n \mathfrak{N} \end{cases}$$

コレデ E_n $(n < +\infty)$ ノ部分ニツイテハ証明出来タコトニナル。

E_∞ ニ對シテハ

$$E_\infty \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_\infty \mathfrak{p}^n$$

デアッテ

$$E_\infty \mathfrak{p}^n \sim E_\infty \mathfrak{N}$$

ナル関係ガ成リ立ツ。然ルニ上ノ $\mathfrak{N}_Z \cdot \mathfrak{M}$ ノ分解ノ式ニ於テ $\mathfrak{p}^n \lesssim \mathfrak{N}$, $\sum \oplus \mathfrak{q}_n \lesssim \mathfrak{N}$ デアルカラ，一般ニ $\mathfrak{N}_Z \cdot \mathfrak{M}$ ハ

$$\mathfrak{N}_Z \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{L}^n, \qquad \mathfrak{L}^n \lesssim \mathfrak{N}$$

ノ形ニ現ハサレルコトガ分ル．従ッテ超限帰納法ヲ使ッテ $\mathfrak{M}_\infty$ ヲ更ニ分解シテ行ケバ，遂ニハ $\mathfrak{N}_Z \cdot \mathfrak{M}$ ハ

$$\mathfrak{N}_Z \mathfrak{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{L}^n \qquad \mathfrak{L}^n \lesssim \mathfrak{N}$$

ノ形ニ表ハサレル．$E_\infty \mathfrak{M}$ ニ戻レバ

$$E_\infty \mathfrak{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{L}^n, \qquad \mathfrak{L}^n \lesssim E_\infty \mathfrak{N}$$

ナル分解ガ可能デアル．明ラカニ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{L}^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_\infty \mathfrak{p}^n$$

デアル．故ニ

$$E_\infty \mathfrak{M} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_\infty \mathfrak{p}^n$$

デナケレバナラナイ。コノ $E_\infty \mathfrak{M}$ ト $\sum \oplus E_\infty \mathfrak{p}^n$ ノ間ノ

isometric ナ，ヲ M ナル変換デ $E_\infty\mathfrak{p}^n$ ニ對應スルモノヲ $\mathfrak{p}^n_\infty$ ト書ケバ，明ラカニ

$$E_\infty\mathfrak{M} = \sum_{n=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{p}^n_\infty, \quad \mathfrak{p}^n_\infty \sim E_\infty\mathfrak{N}$$

分解ノ一意性ハ容易ニ示サレル．今二種ノ分解ガアッタトシ，ソノ一方ヲ棒ヲ引イテ表ハスコトニスル．$n \neq m$ トシテ $G = E_n\overline{E}_m$ トオケバ，例ヘバ $n, m < +\infty$ ノトキニハ

$$\begin{aligned} G\mathfrak{M} &= G\mathfrak{p}'_n \oplus \cdots\cdots \oplus G\mathfrak{p}^n_n \oplus G\mathfrak{q}_n \\ &= G\overline{\mathfrak{p}}'_m \oplus \cdots\cdots \oplus G\overline{\mathfrak{p}}^m_m \oplus G\overline{\mathfrak{q}}_m \end{aligned}$$

デアッテ

$$\begin{cases} G\mathfrak{p}^j_n \sim G\overline{\mathfrak{p}}^k_m \sim G\mathfrak{N}, \\ G\mathfrak{q}_n \precsim G\mathfrak{N}, \quad G\overline{\mathfrak{q}}_m \precsim G\mathfrak{N} \end{cases}$$

デアルガ，コレハ $G = 0$ ナラザル限リ不可能デアル。[11]

（証明了）

定義 2.4. $\mathfrak{M}$ ヲ M ハ $0 < E \leqq \mathfrak{M}_z$, $E \in \mathbf{Z}$ ナンスベテノ E ニ對シテ $E\mathfrak{M}$ ガ無限ナルトキ純粋ニ無限デアルトイフ。

任意ノ $\mathfrak{M}_\eta\mathrm{M}$ ガ與ヘラレタトキ *Lemma* 2.2 カラ容易ニ知ラレル如ク，$E\mathfrak{M}$ ガ有限ナル最大ノ $\mathbf{Z}$ ノ *projection* E ガ存在スル．コレヲ用ヒテ $\mathfrak{M}$ ヲ

$$\mathfrak{M} = E\mathfrak{M} \oplus (1-E)\mathfrak{M}$$

ト分解スレバ，$(1-E)\mathfrak{M}$ ハ明ラカニ純粋ニ無限デアル．

---

11) *Lemma* 1.5 ニヨル。

スナハチ任意ノ $\mathfrak{M}$ ハ有限ナ部分ト純粋ニ無限ナ部ニ分ケラレルノデアル。

Lemma 2.5. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ガ共ニ純粋ニ無限ナルトキハ、$\mathfrak{M}_Z=\mathfrak{N}_Z$ ナラバ $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{N}$ デアル。

証明. $\mathfrak{M}$ ガ純粋ニ無限デアルトシ、$\mathfrak{M}_Z=E$ トオク. $\mathfrak{M}$ ハ無限デアルカラ

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{Q}\oplus\mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q}\sim\mathfrak{M},\quad \mathfrak{P}\neq 0$$

ナル分解ガ可能デアル。Lemma 2.2. ヲ用ヒレバ容易ニ知ラレル如ク、コノ様ナ分解ノ内 $\mathfrak{P}_Z$ ガ最大ナモノガ存在スル. $\mathfrak{P}$ ヲ $\mathfrak{P}_Z$ ガ最大ナルヤウニトリ $(1-\mathfrak{P}_Z)\mathfrak{M}$ ヲ作レバ、$\mathfrak{P}_Z$ ガ最大ナルコトカラ、$(1-\mathfrak{P}_Z)\mathfrak{M}$ ニツイテハ上ノ如キ分解ガ不可能トナル。

スナハチ $(1-\mathfrak{P}_Z)\mathfrak{M}$ ハ有限トナル. 故ニ $(1-\mathfrak{P}_Z)\mathfrak{M}=0$ 故ニ $\mathfrak{P}_Z=E$ デナケレバナラヌ. サテ $\mathfrak{P}$ ヲカクノ如ク定メテオイテ、$\mathfrak{M}\sim\mathfrak{Q}$ ノ對應ヲ用ヒテ $\mathfrak{M}=\mathfrak{Q}\oplus\mathfrak{P}$ ナル分解ヲ $\mathfrak{Q}$ ニ寫ス. 然ルトキハ

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{Q}_1\oplus\mathfrak{P}_1\oplus\mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q}_1\sim\mathfrak{M},\quad \mathfrak{P}_1\sim\mathfrak{P}$$

コレヲ續ケテ行ケバ遂ニハ

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{Q}\oplus\sum_{j=0}^{\infty}\oplus\mathfrak{P}_j,\qquad \mathfrak{P}_j\sim\mathfrak{P}$$

ニ達スル。

一方 $\mathfrak{P}_Z=E=\mathfrak{N}_Z$ ナルコトニ注意スレバ Lemma 2.4 ノ証明ニ於ケルト同様ニシテ、Lemma 2.3 カラ

$$\mathfrak{N}=\sum_{j=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{L}_j, \qquad \mathfrak{L}_j \lesssim \varphi$$

ナル分解ガ導ビカレル．コレト $\mathfrak{M}$ ノ分解ヲ比ベレバ直チニ $\mathfrak{N}\lesssim\mathfrak{M}$ ナルコトガ分ル．故ニ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{M}$ ノ関係ハ対稱デアルカラ，$\mathfrak{N}\sim\mathfrak{M}$ デナケレバナラヌ．（証明了）

コノ節ノ初メニ述ベタ如ク，$\mathbb{Z}$ ノ *projection* E ヲ *measure space* Ω ノ可測集合 Γ ヲ用ヒテ $E=E(\Gamma)$ ト現ハス．スルト $\mathbb{Z}$ ニ含マレル *bounded operator* A ハ Ω ノ有界可測函数 $\alpha(\lambda)$ ヲ用ヒテ

$$A=\int_{\Omega}\alpha(\lambda)\,E(d\lambda)$$

ト現ハサレル．$\alpha(\lambda)$ ハ測度 0 ノ集合ヲ除ケバ A ニヨッテ唯一通リニ定マル．以下 Ω ノ可測集合或ハ可測函数ヲ考ヘル場合ニハ，零集合ヲ除イテ一致スルモノハ一般ニ同ジモノト見做スコトニスル。——

定義2.5．$\mathbb{M}$ ニ属スル各 $\mathfrak{M}$ ニ対シテ Ω 上ノ負ナラザル可測函数 $D(\lambda;\mathfrak{M})$ ガ定義サレテヰテ，コレガ次ノ四ツノ條件ヲ満足スルトキ，$D(\lambda;\mathfrak{M})$ ヲ $\mathbb{M}$ ニ関スル *dimension functional* ト名付ケ，$D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ デ表ハス。

$$\begin{cases} \text{i)} & \mathfrak{M}\sim\mathfrak{N}\ (\mathbb{M})\ \text{ナラバ}\quad D(\lambda;\mathfrak{M})=D(\lambda;\mathfrak{N}), \\ \text{ii)} & \mathfrak{M}\underset{E(\Gamma)}{\gg}0\ \text{ナラバ}\quad \lambda\in\Gamma\ \text{ノトキ}\ D(\lambda;\mathfrak{M})>0, \\ \text{iii)} & \mathfrak{M}\ \text{ガ有限ナラバ}\quad D(\lambda;\mathfrak{M})<+\infty, \\ \text{iv)} & D(\lambda;\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N})=D(\lambda;\mathfrak{M})+D(\lambda;\mathfrak{N}). \end{cases}$$

コノトキスル $D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ relative dimension トヨブ。

$D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ ニ對シテ形式的ニ

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})=\int_{\Omega} D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})\,E(d\lambda)$$

ヲ作レバ，$\mathfrak{M}$ ガ有限ノ場合ニハ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ハ "$\mathbb{Z}$ ニ屬スル" self adjoint operator トナル。$\mathfrak{M}$ ガ無限ノ場合ニハ $D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ ハ ∞ トナルコトガアルカラ，眞ノ意味デハ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ヲ operator トヨブコトハ出來ナイガ，然シコノ場合ニモ形式的ニ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ハ $\mathbb{Z}$ ニ屬スル self adjoint operator デアルト言ッテヨイデアラウ。コノ樣ナ言ヒ方ヲ使ヘバ，$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ハ次ノ樣ニ定義セラレル。

定義. $\mathbb{M}$ ニ屬スル各 $\mathfrak{M}$ ニ對シテ $\mathbb{Z}$ ニ屬スル formal self adjoint operator $D(\mathfrak{M})$ ガ定義サレテヰテ之レガ四ツノ條件：

i) $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{N}$ ナラバ $D(\mathfrak{M})=D(\mathfrak{N})$,

ii) $\mathfrak{M}\geqq 0$ ナラバ $E\mathfrak{H}$ デ $ED(\mathfrak{M})>0$

iii) 有限ナ $\mathfrak{M}$ ニ對シテハ $D(\mathfrak{M})$ ハ眞ノ self adjoint operator デアル.

iv) $D(\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N})=D(\mathfrak{M})\oplus D(\mathfrak{N})$

ヲ滿足スルトキ，$D(\mathfrak{M})$ ヲ $\mathbb{M}$ ニ關スル dimension functional ト名付ケ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ デ表ハス。

定理1ニヨレバ $\mathfrak{H}$ ハ $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}\oplus\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}\oplus\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}$ ニ分解セラレル. Dimension functional ヲノ

ニハ明ラカニ各 $\mathfrak{h}_N$ ヲ別々ニ扱ヘバヨイ。ソコデ先ヅ $\mathfrak{h}_{\mathrm{I}}$ カラ始メルコトニシ、$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{\mathrm{I}}$ トオク。[12] スルト定義カラ $\mathfrak{h}$ デハ $\mathbb{M}$ ニ関シテ 1 ニ於テ最小ナ $\mathfrak{N}^0$ ガ存在スル。コノ様ナ $\mathfrak{N}^0$ ヲ一ツ定メテオイテ、任意ノ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathbb{M}$ ト $\mathfrak{N}^0$ ニ関シテ Lemma 2.4 ヲ適用スル。然ルトキハ、$\mathfrak{N}^0$ ガ最小ナルコトカラ、$\mathfrak{Q} \ll \mathfrak{N}$ ナル $\mathfrak{Q}$ ハスベテ 0 トナラネバナラヌ。故ニ Lemma 2.4. ニヨル分解ハ

$$1=\sum_{0\leqq n\leqq\infty} E_n, \qquad E_n E_m = 0 \ (n \neq m);$$

$$E_n \mathfrak{M} = \sum_{0\leqq \nu \leqq n} \oplus \mathfrak{P}_n^{\nu}, \qquad \mathfrak{P}_n^{\nu} \sim E_n \mathfrak{N}^0 \ (\mathbb{M})$$

ナル形ヲトル。吾々ハ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ヲ、コノ分解ニ表ハレタ E_n ヲ用ヒテ

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}) = \sum_{0\leqq n\leqq\infty} n E$$

ト定義スル。然ルトキハ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ガ dimension functional ノ四ツノ條件ヲ満足シテヰルコトハ容易ニ確メラレルデアラウ。

次ニ $\mathfrak{h}_{\mathrm{II}}$ ヲ考ヘル。先ヅ次ノ Lemma ヲ証明シヨウ。

Lemma 2.6. $\mathfrak{h}_{\mathrm{II}}$ デハ有限ナ $\mathfrak{M}$ ハ

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}, \qquad \mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q} \ (\mathbb{M})$$

ナル形ニ分解セラレル。[13]

---

(12) $\mathfrak{h}$ ガ $\mathfrak{h}_{\mathrm{I}}$ ノミヨリ成ルト考ヘル。

(13) コノ lemma ニヨツテ $\mathbb{M}$ ガ既約ノ場合ニモ dimension ノ構成ハ著シク簡單ニナル。

証明. $\mathfrak{M}$ ハ最小デハナイカラ $\mathfrak{N}_Z=\mathfrak{M}_Z$, $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ デ $\mathfrak{N}\neq\mathfrak{M}$ ナル $\mathfrak{N}$,($\eta\mathbf{M}$) ガ存在スル. コノ様ナ $\mathfrak{N}$ ヲ一ツトッテ

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\oplus\mathfrak{L}$$

トオキ, $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{L}$ ニ Lemma 2.3 ヲ適用スル. スルト $E+F=1$ デ

$$\begin{cases} E\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1\oplus\mathfrak{M}_1^{(E)}, & \mathfrak{L}_1\sim E\mathfrak{N}; \\ F\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\oplus\mathfrak{M}_1^{(F)}, & \mathfrak{N}_1\sim F; \\ (\mathfrak{M}_1^{(E)})_Z\leqq E, & (\mathfrak{M}_1^{(F)})_Z\leqq F \end{cases}$$

ナル $\mathbf{Z}$ ノ projection E, F ガ存在スルコトガ分ル. ソコデ

$$\mathfrak{P}_1=E\mathfrak{N}\oplus\mathfrak{N}_1, \qquad \mathfrak{Q}_1=\mathfrak{L}_1\oplus F\mathfrak{L}$$

トオク. 然ルトキハ $\mathfrak{P}_1\sim\mathfrak{Q}_1$ ナルコトハ明ラカデアルガ, $\mathfrak{P}_1\sim\mathfrak{Q}_1\neq 0$ ガ成立ツ. 何トナレバ $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{Q}_1=0$ トスレバ $\mathfrak{N}=F\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}=E\mathfrak{L}$ トナルカラ, $\mathfrak{N}_Z=\mathfrak{M}_Z$ カラ $F\geqq\mathfrak{M}_Z$ ヲ得, 従ッテ $\mathfrak{L}=0$ デナケレバナラナイコトニナル. 故ニ $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_1^{(E)}\oplus\mathfrak{M}_1^{(F)}$ トオケバ

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{P}_1\oplus\mathfrak{Q}_1\oplus\mathfrak{M}_1, \qquad \mathfrak{P}_1\sim\mathfrak{Q}_1\neq 0$$

$\mathfrak{M}_1$ ニツイテモ同ジコトヲ行ッテ

$$\mathfrak{M}_1=\mathfrak{P}_2\oplus\mathfrak{Q}_2\oplus\mathfrak{M}_2 \qquad \mathfrak{P}_2\sim\mathfrak{Q}_2\neq 0$$

ノ形ニ分解シ, 更ニ $\mathfrak{M}_2$ ヲ分解スル; コノコトヲ超限帰納法ヲ使ッテ無限ニ繰返セバ, $\mathfrak{M}$ ハ separable デアルカラ可附番回デ $\mathfrak{M}_\tau=0$ トナリ

結局

$$\mathfrak{M} = \sum_{j=1} \oplus (\mathfrak{p}_j \oplus \mathfrak{q}_j), \qquad \mathfrak{p}_j \sim \mathfrak{q}_j$$

トナル。故ニ $\mathfrak{p} = \sum \oplus \mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{q} = \sum \oplus \mathfrak{q}_j$ トオケバ

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}, \qquad \mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}\,(M)$$

$\mathfrak{h}_y = \mathfrak{h}_{y_{II}}$ トオク。[14] スルト $\mathfrak{h}_y$ デハ $\mathfrak{N}_Z = 1$ ナル有限ナ $\mathfrak{N}$ ガ存在スル。任意ノ $\mathfrak{M}\,(\eta M)$ トコノ様ナ $\mathfrak{N}$ ニツイテ Lemma 2.4 ヲ適用シ，

$$\begin{cases} I = \sum_{0 \leqq n \leqq \infty} E_n, \quad E_n \in \mathbb{Z}, \quad E_n E_m = 0 \quad (n \neq m) \\ E_n \mathfrak{M} = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \oplus \mathfrak{p}_n^j \oplus \mathfrak{q}_n, \quad \mathfrak{p}_n^j \sim E_n \mathfrak{N}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{q}_n \underset{E_n}{\lneqq} E_n \mathfrak{N} \end{cases}$$

トル E_n ヲ定メ

$$[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}] = \int_{\Omega} [\lambda; \mathfrak{M} : \mathfrak{N}]\, E(d\lambda) = \sum_{0 \leqq n \leqq \infty} n E_n$$

ニヨッテ $[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}]$, $[\lambda; \mathfrak{M} : \mathfrak{N}]$ ヲ定義スル。$[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}]$ ハ次ノ性質ヲ有スル：

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{p} \quad ナラバ \quad [\mathfrak{M} : \mathfrak{N}] = [\mathfrak{p} : \mathfrak{N}]. \\ \text{ii)} \quad E[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}] = 0 \quad ナラバ \quad \mathfrak{M} \underset{E}{\lneqq} \mathfrak{N}. \\ \text{iii)} \quad \mathfrak{M} ガ有限ナラバ \quad [\lambda; \mathfrak{M} : \mathfrak{N}] < +\infty \\ \text{iv)} \quad [\mathfrak{M} : \mathfrak{N}] \oplus [\mathfrak{p} : \mathfrak{N}] \leqq [\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{p} : \mathfrak{N}] \\ \qquad\qquad \leqq [\mathfrak{M} : \mathfrak{N}] \oplus [\mathfrak{p} : \mathfrak{N}] + 1. \\ \text{v)} \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}_1, \quad \mathfrak{L} \sim \mathfrak{L}_1 \quad ナルトキハ \\ \qquad 2[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}] \leqq [\mathfrak{M} : \mathfrak{L}] \leqq 2[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}] + 1 \end{cases}$$

---

14) $\mathfrak{h}_y$ ガ $\mathfrak{h}_{y_{II}}$ ノミヨリ成ルト考ヘル。

何トナレバ i) ハ $\mathfrak{M}$ ヲ $\sim\mathfrak{M}$ ナル $\mathfrak{P}$ デ置換ヘテモ E_n ガ変ラナイコトカラ明ラカデアル。 ii) $E[\mathfrak{M}:\mathfrak{N}]=0$ ナラバ $E \leqq E_0$ デナケレバナラヌ。故ニ $E\mathfrak{M}=E\mathfrak{Q}_0 \ll_E \mathfrak{N}$。

iii) ハ明ラカデアル。 iv) ヲ証明スルタメニ $\mathfrak{P}$ ニ関シテ作ッタ E_n, $\mathfrak{P}_n^j$, $\mathfrak{Q}_n$ ヲ夫々 $\bar{E}_n$, $\bar{\mathfrak{P}}_n^j$, $\bar{\mathfrak{Q}}_n$ ト表ハスコトトシ, $F=E_m\bar{E}_n$ トオク。 $F\mathfrak{Q}_m \oplus F\bar{\mathfrak{Q}}_n$ ト $F\mathfrak{N}$ ニ Lemma 2.4 ヲ適用シ, Lemma 1.5 ニ注意スレバ, $F\mathfrak{Q}_m \ll_F \mathfrak{N}$, $F\bar{\mathfrak{Q}}_n \ll_F \mathfrak{N}$ ナルコトカラ, F ハ二ツノ部分 F_0 ト F_1 ニ分解サレテ

$$\begin{cases} F_0\mathfrak{Q}_m \oplus F_0\bar{\mathfrak{Q}}_n = \mathfrak{Q}_{mn0}, & \mathfrak{Q}_{mn0} \ll_{F_0} \mathfrak{N} \\ F_1\mathfrak{Q}_m \oplus F_1\bar{\mathfrak{Q}}_n = \mathfrak{P}_{mn} \oplus \mathfrak{Q}_{mn1}, & \mathfrak{P}_{mn} \sim F_1\mathfrak{N}, \\ & \mathfrak{Q}_{mn1} \ll_{F_1} \mathfrak{N} \end{cases}$$

トナルコトガ分ル。

$$\begin{cases} F_0\mathfrak{M} = \sum \oplus F_0\mathfrak{P}_m^j \oplus \sum_{1\leqq k\leqq n} \oplus F_0\mathfrak{P}_n^k \oplus \mathfrak{Q}_{mn0}; \\ F_1\mathfrak{M} = \sum_{1\leqq j\leqq m} \oplus F_1\mathfrak{P}_m^j \oplus \sum_{1\leqq k\leqq n} \oplus F_1\mathfrak{P}_n^k \oplus \mathfrak{P}_{mn} \oplus \mathfrak{Q}_{mn1}; \\ F_0\mathfrak{P}_m^j \sim F_0\mathfrak{P}_n^k \sim F_0\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{Q}_{mn0} \ll_{F_0} \mathfrak{N}; \\ F_1\mathfrak{P}_m^j \sim F_1\mathfrak{P}_n^k \sim \mathfrak{P}_{mn} \sim F\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{Q}_{mn1} \ll_{F_1} \mathfrak{N}. \end{cases}$$

コレヨリ, $F_0 = E_{mn0}$, $F_1 = E_{mn1}$ トオケバ

$$[\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{P}:\mathfrak{N}]$$
$$=\sum_m\sum_n\{(m+n)E_{mn0}+(m+n+1)E_{mn1}\}$$

トナル。 iv) ハコレカラ直チニ導カレル。 v) ノ証明。

$$\mathfrak{p}_n^j \sim E_n\mathfrak{N} = E_n\mathfrak{L} \oplus E_n\mathfrak{L},$$

ノ対應ニヨッテ $\mathfrak{p}_n^j$ ハ

$$\mathfrak{p}_n^j = \mathfrak{p}_{n0}^j \oplus \mathfrak{p}_{n1}^j, \quad \mathfrak{p}_{n0}^j \sim \mathfrak{p}_{n1}^j \sim E_n\mathfrak{L}$$

ノ如ク分解サレル。又 $\mathfrak{q}_n$ ト $E_n\mathfrak{L}$ ニ *Lemma* 2.4 ヲ適用シテ, *Lemma* 1.5 ニ注意スレバ

$$\begin{cases} E_n = E_{n0} + E_{n1}, \quad E_{n0}\cdot E_{n1} = 0; \\ E_{n0}\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n0}, \quad \mathfrak{q}_{n0} \underset{E_{n0}}{\ll} \mathfrak{L}; \\ E_{n1}\mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}_n \oplus \mathfrak{q}_{n1}, \quad \mathfrak{p}_n \sim E_{n1}\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{q}_{n1} \underset{E_{n1}}{\ll} \mathfrak{L} \end{cases}$$

ナルコトガ示サレル。 故ニ

$$\begin{cases} E_{n0}\mathfrak{M} = \sum_{1\leqq j\leqq n} \oplus (E_{n0}\mathfrak{p}_{n0}^j \oplus E_{n0}\mathfrak{p}_{n1}^j) \oplus \mathfrak{q}_{n0}, \\ E_{n0}\mathfrak{p}_{n0}^j \sim E_{n0}\mathfrak{p}_{n1}^j \sim E_{n0}\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{q}_{n0} \underset{E_{n0}}{\ll} \mathfrak{L}; \\ E_{n1}\mathfrak{M} = \sum_{1\leqq j\leqq n} \oplus (E_{n1}\mathfrak{p}_{n0}^j \oplus E_{n1}\mathfrak{p}_{n1}^j) \oplus \mathfrak{p}_n \oplus \mathfrak{q}_{n1} \\ E_{n1}\mathfrak{p}_{n0}^j \sim E_{n1}\mathfrak{p}_{n1}^j \sim \mathfrak{p}_n \sim E_{n1}\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{q}_{n1} \underset{E_{n1}}{\ll} \mathfrak{L} \end{cases}$$

故ニ

$$[\mathfrak{M}:\mathfrak{L}] = \sum nE_{n0} + \sum (n+1)E_{n1} = 2\sum nE_n + \sum E_{n1}$$

デアル。 $[\mathfrak{M}:\mathfrak{N}] = \sum nE_n$ デアルカラ, コレヨリ直チニ v) ガ出ル。

$\mathfrak{N}_2 = 1$ ナル有限ナ $\mathfrak{N}$ ヲ一ツ定メテコレヲ $\mathfrak{N}^0$ トシ, $\mathfrak{N}^0$ カ

ヲ始メテ Lemma 2.6 ニヨッテ

$$\mathfrak{N}^{\nu-1} = \mathfrak{N}^{\nu} \oplus \mathfrak{L}^{\nu}, \quad \mathfrak{N}^{\nu} \sim \mathfrak{L}^{\nu}$$

ナル $\mathfrak{N}^{\nu}$ ヲ順次ニ定メテ行ク。然ルトキハ v) カラ明ラカナル如ク

$$\frac{1}{2^{\nu}}[\lambda;\ \mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}] \leqq \frac{1}{2^{\nu+1}}[\lambda;\ \mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu+1}]$$

$$\leqq \frac{1}{2^{\nu}}[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}] + \frac{1}{2^{\nu+1}}$$

故ニ $\nu \to \infty$ ノトキ $\frac{1}{2^{\nu}}[\lambda;\ \mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}]$ ハ収斂スル。ソコデ吾々ハ

$$D(\lambda;\ \mathfrak{M}) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2^{\nu}}[\lambda;\ \mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}]$$

或ハ記号的ニ

$$D(\mathfrak{M}) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2^{\nu}}[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}]$$

ニヨッテ $D(\lambda;\ \mathfrak{M})$ 或ハ $D(\mathfrak{M})$ ヲ定義スル。然ルトキハ

$$(*) \quad \frac{1}{2^{\nu}}[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}] \leqq D(\mathfrak{M}) \leqq \frac{1}{2^{\nu}}[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}] + \frac{1}{2^{\nu+1}}$$

コノ (*) ヲ用ヒレバ $D(\mathfrak{M})$ ガ dimension functional ナルコトハ容易ニ示サレル。先ヅ $\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{P}$ ナラバ $D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{P})$ ナルコトハ i) カラ明ラカデアル。$\mathfrak{M} \neq 0$ ナラバ $ED(\mathfrak{M})$ ガ $E\mathfrak{h}_{\mathfrak{f}}$ デ >0 ナルコトヲ示スタメニハ，$ED(\mathfrak{M}) = 0$ ナラバ $E\mathfrak{M} = 0$ ナルコトヲ言ヘバヨイ。然ルニ $ED(\mathfrak{M}) = 0$ トスレバ (*) カラスベテノ ν ニツイテ $E[\mathfrak{M} : \mathfrak{N}^{\nu}] = 0$ トナル。従ッテ iii) ニヨッテ $E\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}^{\nu}$ ガスベテノ ν ニツイテ成立スル。然ルニ

$$\mathfrak{N}^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{N}^\nu \oplus \mathfrak{L}^\infty, \qquad \mathfrak{L}^\infty = \Pi \wedge \mathfrak{L}^\nu$$

デアルカラ $E\mathfrak{M} > 0$ ナラバ $\mathfrak{N}^0$ ハ無限デナケレバナラナイ。故ニ $E\mathfrak{M} = 0$ デアル。$\mathfrak{M}$ ガ有限ナラバ $D(\lambda; \mathfrak{M}) < +\infty$ ナルコトハ iii) ト (*) カラ明ラカデアル。

$$D(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{P}) = D(\mathfrak{M}) \oplus D(\mathfrak{P})$$

iv) ト (*) カラ証明サレル。

最後ニ $\mathfrak{F}_{\mathrm{III}}$ ヲ考ヘル。$\mathfrak{F}_{\mathrm{III}}$ デハ $\mathbb{M}$ ニ属スル 0 ナラザル $\mathfrak{M}$ ハスベテ純粋ニ無限デアル。故ニ Lemma 2.5 ノ示ス如ク，$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{N}_Z$ ト一致スル。従ッテコノ場合ニハ

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}) = \infty \cdot \mathfrak{M}_Z$$

トオケバヨイコト明ラカデアラウ。

—— 以上デ dimension functional $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ガ存在スルコトガ分ッタ。次ニソノ一意性ヲ示サウ。先ヅ $D_{\mathbb{M}}(0) = 0$ ナルコトハ明ラカデアル。次ニ $\mathfrak{M}$ ガ純粋ニ無限デアルトスレバ，Lemma 2.5 ノ証明デ述ベタ如ク

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{P}_Z = \mathfrak{M}_Z$$

ナル $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ ガ存在スル。$\mathfrak{M}_Z = E(\Gamma)$ トスレバ

$$D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathfrak{M}) = D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathfrak{P}) + D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathfrak{N})$$

デアルガ $\lambda \in \Gamma$ デハ $D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathfrak{P}) > 0$, $D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathfrak{M}) = D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathfrak{N})$ デアル。コノタメニハ $D_{\mathbb{M}}(\lambda; \mathfrak{M}) = \infty$ デナケレバナラ

又．故ニ

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}) = \infty \cdot \mathfrak{M}_2$$

コレデ $\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}$ ニ於ケル一意性ハ証明サレタコトニナル。$\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ ト $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ ニ於ケル一意性ヲ示スタメニ上記ノ方法デツクラレタ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ヲ $D^0_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ト書クコトニスル。$\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ デハ $\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{N}^0$ ニ関スル 1 ノ分解ヲ $1=\sum E_n$ トスレバ

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}) = \sum n E_n D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{N})$$

トナル。然ルニ $\sum n E_n = D^0_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ デアルカラ

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{N}^0) \cdot D^0_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$$

スナハチ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ハ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{N}^0)$ ナル積因子ヲ除ケバ一意的ニ定マルノデアル．最後ニ $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ ヲ考ヘル．$\mathfrak{M}$ ト $\mathfrak{N}^\nu$ ニ関スル 1 ノ分解ヲ $1=\sum E_n$ トスレバ

$$E_n \mathfrak{M} = \sum_{1 \leqq j \leqq n} \oplus \mathfrak{P}^j_n \oplus \mathfrak{Q}_n, \quad \mathfrak{P}^j_n \sim E_n \mathfrak{N}^\nu,$$
$$\mathfrak{Q}_n \underset{E_n}{\lesssim} \mathfrak{N}^\nu$$

ヨリ，任意ノ $D(\mathfrak{M}) = D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ニツイテ

$$[\mathfrak{M}:\mathfrak{N}^\nu]\, D(\mathfrak{N}^\nu) \leqq D(\mathfrak{M}) \leqq ([\mathfrak{M}:\mathfrak{N}^\nu]+1)\, D(\mathfrak{N}^\nu)$$

ガ成立スルコトガ分ル．然ルニ

$$D(\mathfrak{N}^\nu) = \frac{1}{2^\nu} D(\mathfrak{N}^0)$$

デアル。故ニ

$$D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{N}^0) \cdot D^0_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$$

以上ヲ要約シテ：

定理2. $\mathbb{M}$ガ任意ノ operator ring ナルトキ, $\mathbb{M}$ニ関スル dimension functional $D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ ガ存在スル. Dimension functional ハ積因子ヲ除ケバ一意的ニ定マル.——其ノ中ノ一ツヲ $D^{\circ}_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ トスレバ, 他ノ $D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ ハ $0<\phi(\lambda)<+\infty$ ナル一定ノ可測函数 $\phi(\lambda)$ ヲ用ヒテ

$$D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})=\phi(\lambda)D^{\circ}_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$$

ト現ハサレル. Dimension $D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ ハ $\mathfrak{Z}$ ニ属スル formal self adjoint operator:

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})=\int_{\Omega} D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})E(d\lambda)$$

ヲ用ヒテ表ハサレル.

$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ノ主要ナ性質ヲ次ニ述ベル. 以下簡単ノタメ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ヲ $D(\mathfrak{M})$ ト書クコトニスル. 先ヅ

定理3. $\mathfrak{M}\precsim\mathfrak{N}$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ $D(\mathfrak{M})\leqq D(\mathfrak{N})$ ナルコトデアル.

証明. 必要ナルコトハ明ラカデアル. 充分ナルコトヲ示スタメニ $D(\mathfrak{M})\leqq D(\mathfrak{N})$ デ $\mathfrak{M}$ 未 $\mathfrak{N}$ デアッタトスル. 然ルトキハ $\mathfrak{M}\succ\mathfrak{N}$ ナル $E\in\mathfrak{Z}$ ガ存在スル. 従ッテ

$$E\mathfrak{M}=\mathfrak{p}\oplus\mathfrak{q},\quad \mathfrak{q}_z=E,\quad \mathfrak{p}\sim E\mathfrak{N}$$

故ニ

$$ED(\mathfrak{M})=ED(\mathfrak{N})+D(\mathfrak{q})>ED(\mathfrak{N})$$

デナケレバナラヌ. コレハ然シ $D(\mathfrak{M})\leqq D(\mathfrak{N})$ ニ反スル.

定理4. $D([\mathfrak{M},\mathfrak{N}])+D(\mathfrak{M}\frown\mathfrak{N})=D(\mathfrak{M})+D(\mathfrak{N})$

証明ハ Lemma 1.2 カラ明ラカデアル。

Lemma 2.7. $\mathfrak{N}_j$ ($j=1, 2, \cdots\cdots$) ガ有限,

$$\sum_{j=1}^{\infty} D(\mathfrak{N}_j) \leqq D(\mathfrak{M})$$ ナルトキハ

$$\mathfrak{M}_j \sim \mathfrak{N}_j, \quad \mathfrak{M}_j \perp \mathfrak{M}_k \ (j \neq k), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{M}$$

ナル $\mathfrak{M}_j$ ガ存在スル.

コレハ $\mathfrak{M}$ カラ順次ニ $\mathfrak{M}_j \sim \mathfrak{N}_j$ ナル $\mathfrak{M}_j$ ヲ除イテ行ケバ容易ニ証明サレル。コノ Lemma カラ次ノ定理ガ導カレル。

定理5. $$D\left(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_j)$$

証明. 先ヅ

$$\sum_{j=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} D(\mathfrak{M}_j)$$

$$= \lim_{n\to\infty} D\left(\sum_{j=1}^{n} \oplus \mathfrak{M}_j\right) \leqq D\left(\sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_j\right)$$

ハ明ラカデアル。故ニ若シモ定理ガ成立シナイナラバ $m(\Gamma) > 0$ ナル Ω ノ部分集合 Γ ヲ適当ニ選ンデ, $\lambda \in \Gamma$ ニ於テハ或ハ $\delta > 0$ ニツイテ

$$\sum_{j=1}^{\infty} D(\lambda; \mathfrak{M}_j) + \delta \leqq D\left(\lambda; \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_j\right)$$

ガ成立シ, 而モ $\sum_{j=1}^{\infty} D(\lambda; \mathfrak{M}_j)$ ガ一様収斂スルヤウニ出来

ル。

$$D(\lambda;\sum_{j=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}_j)=\sum_{j=1}^{m-1}D(\lambda;\mathfrak{M}_j)+D(\lambda;\sum_{j=m}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}_j)$$

デアルカラ，上ノ不等式カラハ

$$(a)\quad D(\lambda;\sum_{j=m}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}_j)\geqq\delta$$

デナケレバナラナイコトガ分ル．コレカラ矛盾ヲ導クタメニ h_y ヲ $h_{y\mathrm{I}}$，$h_{y\mathrm{II}}$，$h_{y\mathrm{III}}$ ニ分ケテ考ヘル．$h_{y\mathrm{I}}$，$h_{y\mathrm{III}}$ デハ $\sum_{j=1}^{\infty}D(\lambda;\mathfrak{M}_j)$ ガ Γ デ一様ニ収斂スルコトハ，或 m ガアッテ $j\geqq m$ ニ對シテ $E(\Gamma)\mathfrak{M}_j=0$ ナルコトヲ意味スル．故ニ $E(\Gamma)\sum_{j=m}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}_j=0$ トナッテ (a) ト矛盾スル．$h_{y\mathrm{II}}$ デハ至ル所 $D(\lambda;\mathfrak{N}^{\nu})=\frac{1}{2^{\nu}}$ ナル $\mathfrak{N}^{\nu}$ ガ存在スル．従ッテ m ヲ充分大キクトッテ

$$\sum_{j=m}^{\infty}D(\lambda;\mathfrak{M}_j)\leqq D(\lambda;\mathfrak{N}^{\nu})\qquad(\lambda\in\Gamma)$$

ナラシメナケレバ，Lemma 2.7 カラ

$$\mathfrak{N}_j\sim E(\Gamma)\mathfrak{M}_j,\quad \sum_{j=m}^{\infty}\oplus\mathfrak{N}_j\subseteq\mathfrak{N}^{\nu}$$

ナル $\mathfrak{N}_j$ ガ存在スル．故ニ

$$\sum_{j=m}^{\infty}\oplus E(\Gamma)\mathfrak{M}_j\sim\sum_{j=m}^{\infty}\oplus\mathfrak{N}_j\subseteq\mathfrak{N}^{\nu}$$

故ニ

$$D(\lambda;\sum_{j=m}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}_j)\leqq\frac{1}{2^{\nu}}\qquad(\lambda\in\Gamma)$$

デナケレバナラヌ。ν ハ任意デアルカラ，コレハ矢張(a)ト矛盾スル。

1.3. 吾々ハ既ニ定理1ニ於テ，$\mathfrak{h}$ ハ $\mathbb{M}$ ニ関シ

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{I}\oplus\mathfrak{h}_{II}\oplus\mathfrak{h}_{III},\quad \mathfrak{h}_N=E_N\mathfrak{h}\quad(N=I,II,III)$$

ノ如ク分解サレルコトヲ示シタ。コノ中 $\mathfrak{h}_{I}$ ト $\mathfrak{h}_{II}$ ハ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M})$ ヲ使ヘバ更ニ細カク分解サレル。以下コレヲ述ベル。

先ヅ $\mathfrak{h}_{I}$ ヲ考ヘ，簡単ノタメ $\mathfrak{h}_{I}=\mathfrak{h}$, $E_{I}\mathbb{M}=\mathbb{M}$ トオク。スルト $\mathfrak{h}$ デハ I ニ於テ最小ナ $\mathfrak{M}^0$ ガ存在スル。$D_{\mathbb{M}}$ ヲ $D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{M}^0)=1$ ナルヤウニ normalize シテオケバ，$D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{M})$ ハ $0,1,2,\text{-----},\infty$ ノイヅレカノ値ヲトル。ソコデ $D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{h})$ ヲ考ヘ

$$\Omega_n=(\lambda;D_{\mathbb{M}}(\lambda;\mathfrak{h})=n)\qquad(0\leqq n\leqq\infty)$$

トオキ，

$$E_n=E(\Omega_n),\quad \mathfrak{h}_n=E_n\mathfrak{h},\quad \mathbb{M}_n=E_n\mathbb{M}$$

ニヨッテ E_n, $\mathfrak{h}_n$, $\mathbb{M}_n$ ヲ定義スル。E_n ハ或ハ形式的ニ

$$D_{\mathbb{M}}(\mathfrak{h})=\sum_{0\leqq n\leqq\infty}nE_n$$

ヲ用ヒテモ定義サレル。コノトキ明カニ

$$\mathfrak{h}=\sum_{0\leqq n\leqq\infty}\oplus\mathfrak{h}_n,\qquad \mathbb{M}=\sum_{0\leqq n\leqq\infty}\oplus\mathbb{M}_n$$

デアル。

コノ一ツノ $\mathfrak{h}_n$ ヲトッテ考ヘレバ，$D_{\mathbb{M}_n}(\lambda;\mathfrak{M}^0)=1$,

$D_{\mathbb{M}_n}(\lambda;\ \mathfrak{H}) = n$ デアル。今 $\mathbb{Z}_n = E_n\mathbb{Z}$ ノ任意ノ norm ガ n ヲ越エナイ $\geqq 0$ ナ *formal self adjoint operator* $H = \sum_{0 \leqq m \leqq n} m F_m$ ガ與ヘラレタトスル。

然ルトキハ明ラカニ $D_{\mathbb{M}_n}(F_m \mathfrak{N}^0) = F_m$ デアルカラ，H ハ

$$H = \sum_{0 \leqq j \leqq n} D_{\mathbb{M}_n}\Big(\sum_{0 \leqq m \leqq j} \oplus F_m \mathfrak{N}^0\Big)$$

ト書カレル。$H \leqq D_{\mathbb{M}_n}(\mathfrak{H})$ デアルカラ，Lemma 2.7 ニヨッテ，コノトキ

$$\mathfrak{M}_j \sim \sum_{0 \leqq m \leqq j} \oplus F_m \mathfrak{N}^0, \qquad \sum \oplus \mathfrak{M}_j \leqq \mathfrak{H}_n$$

ナル $\mathfrak{M}_j$ ガ存在スル。コヽデ

$$\mathfrak{M} = \sum \oplus \mathfrak{M}_j$$

トオケバ，定理5カラ

$$D_{\mathbb{M}_n}(\mathfrak{M}) = \sum_{0 \leqq j \leqq n} D_{\mathbb{M}_n}\Big(\sum_{0 \leqq m \leqq j} \oplus F_m \mathfrak{N}^0\Big) = H$$

スナハチ $\mathfrak{H}_n$ デハ任意ノ $0 \leqq H \leqq n$ ナル"整係数ノ" $H \in \mathbb{Z}_n$ ニ對シテ $D_{\mathbb{M}_n}(\mathfrak{M}) = H$ ナル $\mathfrak{M}\ \eta\ \mathbb{M}_n$ ガ存在スルノデアル。後ニ示ス如ク $\mathbb{M}_n$ ハコノ性質ニヨッテ特徴付ケラレル。

$\mathfrak{H}_{II}$ ハ二ツノ部分ニ分解サレル。簡單ノタメ $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{II}$，$\mathbb{M} = E_{II}\mathbb{M}$ トオキ，*dimension functional* ヲ D ト書ク。$\mathfrak{S}_1$，$\mathfrak{S}_\infty$ ヲ

$$\begin{cases} \Omega_1 = (\lambda;\ D(\lambda;\ \mathfrak{h}_y) < +\infty) \\ \Omega_\infty = (\lambda;\ D(\lambda;\ \mathfrak{h}_y) = \infty) \end{cases}$$

ト定義シ，$E_n = E(\Omega_n)\ (n = 1, \infty)$ ヲ用ヒテ $\mathfrak{h}_{y_n} = E_n \mathfrak{h}_y$，$\mathbb{M}_n = E_n \mathbb{M}$ トオケバ，スナハチ

$$\mathfrak{h}_y = \mathfrak{h}_{y_\mathrm{I}} \oplus \mathfrak{h}_{y_\infty}, \quad \mathbb{M} = \mathbb{M}_1 \oplus \mathbb{M}_\infty$$

デアル。

$\mathfrak{h}_{y_\mathrm{I}}$ デハ $D(\mathfrak{M})$ ヲ $D(\mathfrak{h}_{y_\mathrm{I}}) = E_1$ ナル様ニ *normalize* スルコトが出来ル．コノマヽナ *normalization* ノ下デハ，任意ノ $0 \leqq H \leqq 1$ ナル $\mathbb{Z}_1 = E_1 \mathbb{Z}$ ノ *self adjoint operator* H ニ対シテ $D(\mathfrak{M}) = H$ ナル $\mathfrak{M}$ ヿ $\mathbb{M}_1$ が存在スル．コレヲ次ニ証明シヨウ。Ω_1 ヲ $E_1 = E(\Omega_1)$ ナル様ニ定メテ，H ヲ

$$H = \int_{\Omega_1} h(\lambda)\, E(d\lambda)$$

ノ形ニ表ハシ，$h(\lambda)$ ヲ二進小数ニ展開シテ

$$h(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_\nu(\lambda)}{2^\nu}, \qquad e_\nu(\lambda) = 0 \quad 又ハ\ 1$$

トオク。F_ν ヲ

$$F_\nu = \int_{\Omega_1} e_\nu(\lambda)\, E(d\lambda)$$

ト定義スレバ，スナハチ

$$H = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} F_\nu$$

トナル．一方 $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{h}_{y_\mathrm{I}}$ カラ始メテ，$\mathfrak{M}^{\nu-1} = \mathfrak{M}^\nu \oplus \mathfrak{L}^\nu$，$\mathfrak{M}^\nu \sim \mathfrak{L}^\nu$

ナル関係ニヨッテ順次ニ$\mathfrak{M}^{\nu}$ヲ定メテ行ク．コレガ可能ナルコトハ *Lemma* 2.6 カラ明ラカデアル。然ルトキハ $D(\mathfrak{M}^{\nu})=\frac{1}{2^{\nu}}$ デアルカラ，$D(F_{\nu}\mathfrak{M}^{\nu})=\frac{1}{2^{\nu}}F_{\nu}$，従ッテ

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} D(F_{\nu}\mathfrak{M}^{\nu})=H$$

トナル．$H \leqq D(\mathfrak{h}_{\mathrm{I}})$ デアルカラ，コノコトカラ *Lemma* 2.7 ニヨッテ

$$\mathfrak{M}_{\nu} \sim F_{\nu}\mathfrak{M}^{\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{M}_{\nu} \subseteq \mathfrak{h}_{\mathrm{I}}$$

ナル$\mathfrak{M}_{\nu}$ガ存在スルコトガ分ル。故ニ$\mathfrak{M}=\sum\oplus\mathfrak{M}_{\nu}$トオケバ$D(\mathfrak{M})=H$デアル。

$\mathfrak{h}_{\infty}$ ニツイテモ同様ナ方法デ，$0 \leqq H$ ナル $E_{\infty}\mathbf{Z}$ ノ任意ノ *formal self adjoint operator* H ニ對シテ $D(\mathfrak{M})=H$ ナル $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbb{M}_{\infty}$ ガ存在スルコトガ證明サレル。

以上ノ結果ヲ要約シテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 6. $\mathfrak{h}$ ハ $\mathbb{M}$ ニ関シテ

$$\mathfrak{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\mathfrak{h}_{\mathrm{I}_n}\oplus\mathfrak{h}_{\mathrm{I}_\infty}\oplus\mathfrak{h}_{\mathrm{II}_1}\oplus\mathfrak{h}_{\mathrm{II}_\infty}\oplus\mathfrak{h}_{\mathrm{III}}$$

ノ形ニ分解サレ，コレニ對應シテ$\mathbb{M}$ハ“両側 *ideal*”ノ直和ニ分レル：

$$\mathbb{M}=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\mathbb{M}_{\mathrm{I}_n}\oplus\mathbb{M}_{\mathrm{I}_\infty}\oplus\mathbb{M}_{\mathrm{II}_1}\oplus\mathbb{M}_{\mathrm{II}_\infty}\oplus\mathbb{M}_{\mathrm{III}}$$

各直和因子ヲ dimension functional ハ，適當ニ normalize シテオケバ，夫々次ノ range ヲモツ：

I_n： $0 \leqq H \leqq n$ ナル整固有値ノミヲモツ H ノ全体，

I_∞； $0 \leqq H \leqq \infty$ ナル

II_1： $0 \leqq H \quad 1$ ナル H ノ全体，

II_∞； $0 \leqq H \leqq \infty$ ナル H ノ全体，

III ： 0 又ハ ∞ ナル固有値ノミヲモツ H ノ全体.

但シコヽデ H ハ center ノ formal self adjoint operator ヲ表ハスモノトスル。